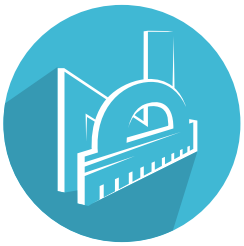
Secuencia didáctica para la enseñanza de la Semejanza utilizando fractales



Por: Rosa María Palacios Jiménez
Claudia Cecilia Castro Cortés
Luz Mery Díaz Camacho

Compartir

Universidad de los Andes
Centro de Investigación y Formación en Educación - Cife

ALIANZA

Encuentro Colombiano de matemática educativa

Propuesta

Una secuencia didáctica se entiende como un sistema de reflexión y actuación del profesor, en donde se explicitan aquellos aspectos del quehacer didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje, donde participan estudiantes, docentes, saberes y el entorno. En esta secuencia didáctica, propuesta para la enseñanza de la semejanza, los fractales serán el recurso, a través del cual se identificarán sus características y propiedades. Para la planeación, se tuvo en cuenta como referente teórico para analizar el concepto de semejanza, la relación intrafigural y las transformaciones geométricas propuestas por Lemonidis.

Marco Teórico

Al realizar la revisión teórica del concepto de semejanza, se encontró que es necesario que los estudiantes tengan nociones acerca de proporcionalidad, caracterización de figuras planas, medida de ángulos y lados, lo cual permitirá construir, según Lemonidis (1991), una aproximación al concepto de semejanza desde las transformaciones geométricas y la relación intrafigural.

La transformación geométrica, corresponde a la aplicación del conjunto de puntos en el plano y la transformación de dos o más trasformaciones, es decir, cuando las figuras están en disposición homotética o se consideran como figuras separadas. La relación intrafigural, hace referencia a la correspondencia de los elementos de las figuras que forman parte del Teorema de Thales, en la que se consideran los aspectos de proyección y homotecia con sus correspondientes razones.

Una vez revisado el proceso de enseñanza a partir de la propuesta de Lemonidis, se organiza con base en la teoría de jerarquía de aprendizaje de Gagné (1975), un ideograma en el que se relacionan, los objetivos asociados a discriminaciones, conceptos, reglas y reglas superiores que conducen al objetivo general. Cada requisito se enumera y se asocia a los siguientes objetivos, que permite proponer una secuencia.

1. Utilizar los conceptos de proporción y medida de segmentos.
2. Analizar la proporción de los lados de las figuras planas y encontrar la constante de proporcionalidad.
3. Evidenciar el Teorema de Thales.
4. Introducir el concepto de semejanza en figuras separadas.
5. Comprobar los criterios de semejanza de triángulos.
6. Deducir las condiciones de semejanza entre figuras planas.

Jerarquía de la propuesta de aula acerca del concepto de semejanza

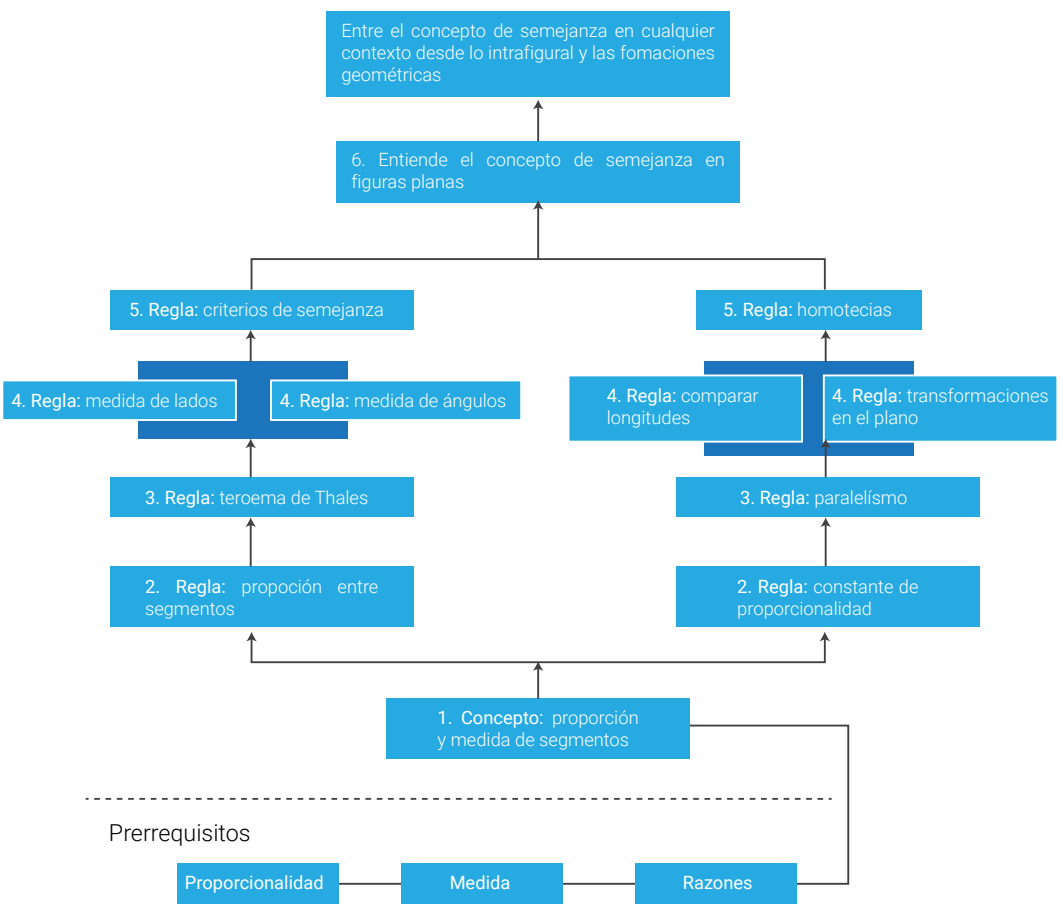


Figura 1. (Jerarquía de aprendizaje par el concepto de semejanza.)
Nota. Tomado de Castro y Céspedes (2009), p. 41.

A partir de los objetivos y teniendo identificados el proceso de aprendizaje de la secuencia, se organiza la Jerarquía, empezando de abajo hacia arriba hasta llegar al objetivo principal.

Como recurso didáctico para lograr la comprensión del concepto semejanza, se utiliza la propiedad de auto-semejanza de los fractales, a través de la cual se abordarán las relaciones intrafigurales y las transformaciones geométricas.

Los fractales como recurso para la enseñanza de la Semejanza

Los fractales se pueden definir como una estructura geométrica generada por la iteración infinita de un proceso simple, que se caracteriza básicamente por dos propiedades: la dimensión y la autosemejanza.

Dado que la intención de esta propuesta es considerar la pertinencia de la enseñanza de la Semejanza a través de los fractales y no el aprendizaje de los mismos, se hace énfasis en centrar la atención en la característica de la autosemejanza.

Mandelbrot (s.f.), define la característica de autosemenjanza en fractales de la siguiente forma: “En general, F es una estructura autosemejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada uno de las cuales es una copia de F a tamaño reducido (una imagen de F mediante una semejanza contractiva)”, es decir, un conjunto es autosemejante si al ser descompuesto en partes, cada una de sus partes es semejante al conjunto total, como se observa en la Alfombra de Sierpinski.

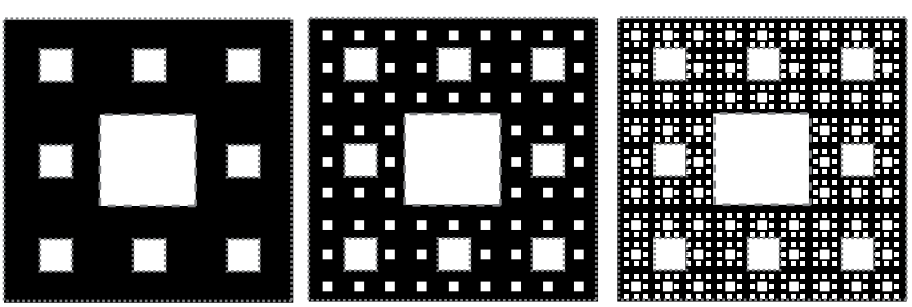


Figura 2.
(Alfombra de Sierpinski)

La propiedad de autosemejanza de los fractales, se establece a partir de las transformaciones geométricas de semejanza: homotecia y congruencia: rotaciones, reflexiones respecto de rectas y traslaciones.

A continuación se presentan algunos de los conceptos matemáticos que se relacionan con el estudio de la semejanza y la forma como se pueden visualizar a través de los fractales.

Teorema de Thales: Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre las transversales son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE'}}{\overline{EF'}}$$

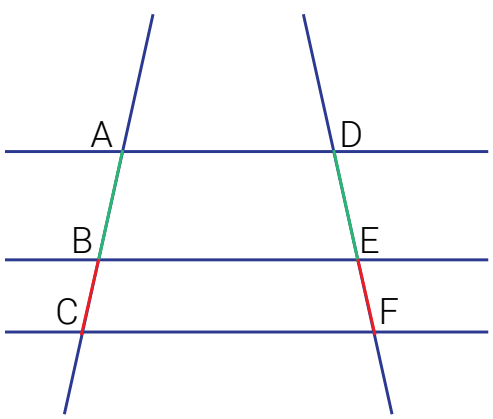


Figura 3. (Representación gráfica del Teorema de Thales)

Proyección Paralela: Sean a y $á$ dos rectas concurrentes en o y una recta b no paralela ni a a ni a $á$ y sean $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R},\mathcal{S}$ puntos sobre a, se trazan rectas paralelas a b que pasen por $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R},\mathcal{S}$ y que corten a $á$ en $\mathcal{P}',\mathcal{Q}',\mathcal{R}',\mathcal{S}'$ Esto es: por cualquier punto de a puedo trazar una recta paralela a b que cortará a $á$, es decir, a cada punto de a es posible asociar un punto de $á$.

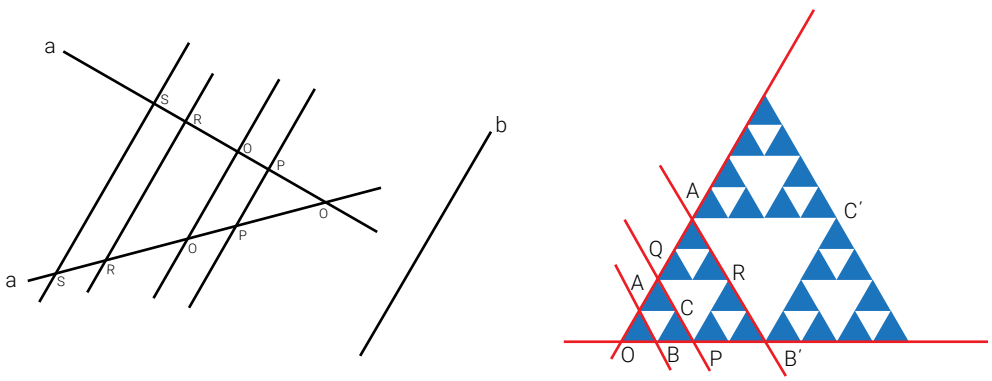


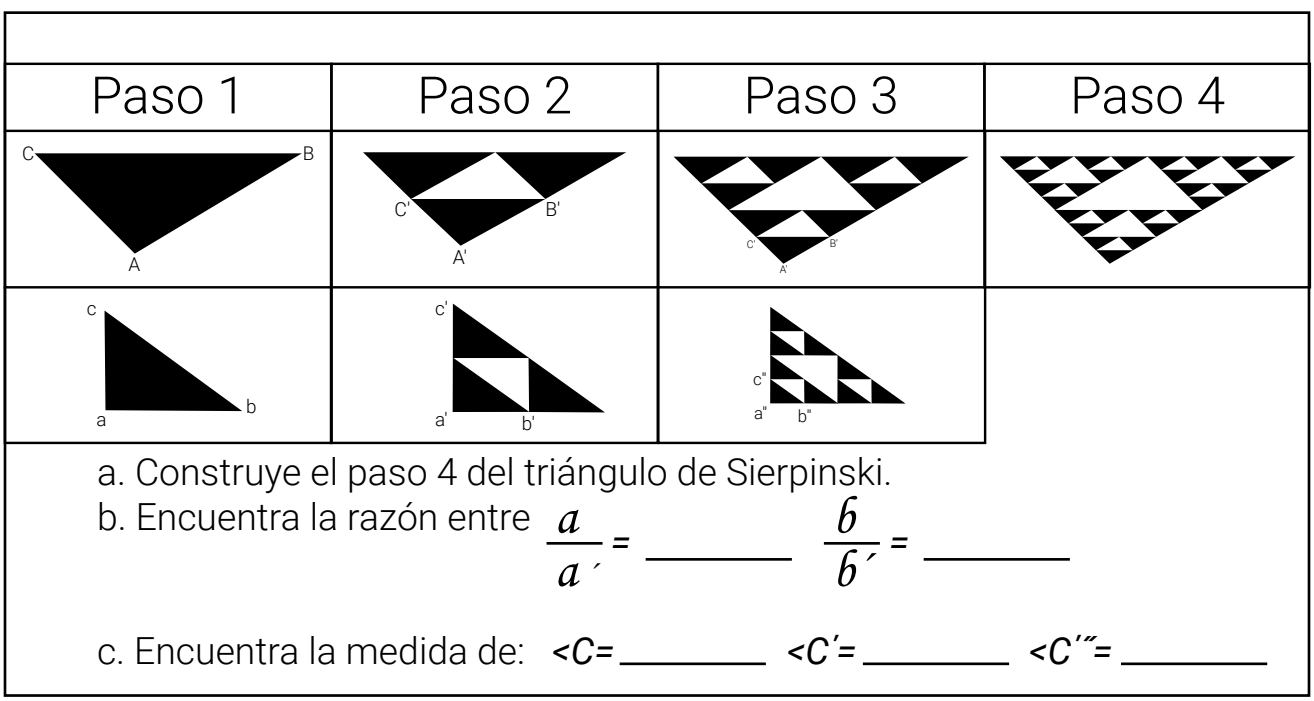
Figura 4. (Proyección paralela (Triángulo de Sierpinski))

El uso del triángulo de Sierpinski, permite visualizar dentro de un contexto, en este caso los fractales, la proyección paralela, el teorema de Thales y las relaciones de razón y proporción que allí se presentan.

Criterios De Semejanza de Triángulos: Es posible a partir de la construcción de diferentes fractales, visualizar los criterios de semejanza de los triángulos y establecer la relación intrafigural de las figuras semejantes generadas en dicha construcción.

- Criterio AA (ángulo - ángulo): Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son semejantes.
- Criterio LAL (lado-ángulo lado): Si dos lados de un triángulo son proporcionales a sus lados correspondientes de otro triángulo y los ángulos correspondientes entre estos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.
- Criterio LLL (lado- lado- lado): Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Con las siguientes situaciones, en donde se presenta la construcción del triángulo de Sierpinski con diferentes tipos de triángulos (escaleno e isósceles), se pretende la construcción, medición y cálculo, de cada uno de los criterios de semejanza.



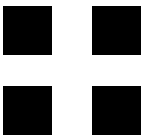
a. Construye el paso 4 del triángulo de Sierpinski.

b. Encuentra la razón entre $\frac{a}{a'}$ = _____ $\frac{b}{b'}$ = _____

c. Encuentra la medida de: <C= _____ <C'= _____ <C''= _____

Figura 5. (Triángulos de Sierpinski escaleno y rectangular)

Otras Relaciones: En el estudio de la semejanza es importante que el estudiante comprenda las relaciones que se dan entre la longitud de los lados, la amplitud de los ángulos, la medida de perímetros y áreas entre la imagen y la preimagen. La construcción y análisis que se hace sobre un fractal permite a los estudiantes encontrar estas relaciones y generalizarlas.

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
Dibuja un cuadrado de lado 9u	Divide cada lado en tres partes iguales, para obtener 3 segmentos. Construye sobre cada lado un cuadrado extrayendo el cuadrado central de cada lado. Quedan 4 cuadrados	Divide cada lado de los cuadrados resultantes en el paso 2. Construye otros cuadrados sobre cada lado y extrae los centrales. Quedan 16 cuadrados.	Repite el proceso del paso anterior sobre los lados de los cuadrados anteriores. Quedan 32 cuadrados.
			

a. Denomina como A al primer cuadrado del paso 1 y como A' a uno de los cuadrados del paso 2, A" a uno de los cuadrados del paso 3 y A"' a uno de los lados del cuadrado del paso 3
b. ¿Cuál es la longitud del lado de cada uno de los cuadrados en cada paso?:
c. ¿Se conserva alguna relación entre las longitudes de los lados? Concluye.
d. ¿Cómo son los ángulos de cada cuadrado y qué relación guarda con los ángulos de los otros cuadrados?
e. Halla perímetro y área de uno de los cuadrados obtenidos en cada paso.

Figura 6. (Análisis de la alfombra de Sierpinski)

Metodología

El trabajo del profesor muchas veces se ve enmarcado en el diseño de actividades que permitan potenciar la participación activa de los estudiantes en sus procesos de aprendizaje, para lo cual resulta importante orientar actividades que promuevan, entre otras:

- La interacción de los estudiantes.
- El uso de recursos y materiales didácticos.
- El reconocimiento y uso de diferentes representaciones.
- El trabajo con situaciones o problemas significativos.

Para organizar la secuencia de actividades se toma como base la propuesta del Grupo Deca[1], que propone incluir:

- ***Actividades de iniciación e introducción:*** En esta fase se observan las ideas previas de los estudiantes y se da cuenta de la importancia de trabajar nuevos conceptos.
- ***Actividades de desarrollo y estructuración:*** El estudiante entra en contacto con los nuevos conceptos y empieza a trabajar para asimilarlos. Es importante tener en cuenta que, en esta etapa el estudiante logra comprensión de algunas situaciones que le permiten la resolución de situaciones problemáticas.
- ***Actividades de aplicación y profundización:*** El estudiante aplica los conocimientos adquiridos en situaciones problemáticas nuevas, reflexiona acerca de los procesos empleados en la resolución de los problemas y plantea nuevos problemas.
- ***Actividades de evaluación:*** La evaluación es concebida como un continuo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje; sin embargo, las actividades planteadas en esta fase están diseñadas específicamente para conocer el grado de apropiación y estrategias de resolución de problemas.

1- Grupo DECA "Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación". En Revista AULA, No. 7, Septiembre, 1998, p.33.

Secuencia para la enseñanza de la Semejanza

Tipo de actividad	Actividad	Intención	Recursos
Actividad de introducción	Análisis y Construcción del conjunto de Cantor y del Copo de Nieve	Revisar conceptos previos de los estudiantes sobre proporcionalidad y medida.	Según Godino (2003), clasificaremos los recursos en: *Ayudas al estudio:* Textos y documentos en los que se aborde el estudio de la semejanza y los fractales. *Instrumentos semióticos:* De tipo gráfico – textual, guía o taller para el estudiante. Representaciones fractales.
Actividad de Estructuración	Análisis y construcción del triangulo de Sierpinski. Construcción del cuadrado de Cantor	Deducir el teorema de Thales, hacer una aproximación a la semejanza a partir de figuras separadas.	
Actividad de Profundización	Análisis y Construcción Triángulo de Cantor, Triángulo de Sierpinski y cuadrado de Besicovich.	Trabajar los criterios de triángulos semejantes.	
Actividad de Evaluación	Análisis de las Curvas de Hilbert y Peano	TAplicar los conceptos estudiados.	

Tabla 1. (Secuencia Didáctica para la enseñanza de la semejanza)

Se plantea una metodología de trabajo en grupo con el fin de que los estudiantes a través de la comunicación y la interacción, propongan estrategias de solución a las situaciones planteadas. El profesor será un orientador en el proceso de construcción de los estudiantes, dará pautas para la realización de la socialización y tendrá a su cargo la institucionalización de los conceptos. En la evaluación se propondrán actividades en las cuales se hará uso de figuras fractales y de otras de diferente naturaleza para verificar que el concepto de semejanza se ha comprendido ya que los estudiantes pueden utilizarlo en diferentes contextos.

Referencias

Castro, C. y Céspedes, Y. (2009). ***Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza.*** Bogotá, Colombia. Universidad Sergio arboleda.

Escudero, I. (2003). ***La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. En Castro y otros (Eds.). Investigación en Educación Matemática.*** Comunicación presentada en los Grupos de Trabajo del VII Simposio de la SEIEM. Granada. Publicación en CD- ROM, ISBN 84-338-3019-8.

Gagné, (1975). ***Principios básicos del aprendizaje para la instrucción.*** México D.F., México. Diana.

Gualdrón, É. (2006). ***Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza.*** Universidad de Pamplona, Colombia. Universidad de Valencia.

Godino J. (2002). ***Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas.*** En: A. M. Machado y cols. (Ed.), Actas do ProfMat 98. Portugal. ***Associaçao de Professores de Matemática: Guimaraes.***

Grupo Beta. (1990). ***Proporcionalidad geométrica y semejanza.*** Madrid, España. Síntesis.

Grupo DECA. (1992). ***Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación.*** En: Revista AULA, No.6.

Guerrero, F. Sanchez, N. y Lurduy, O. (2006). ***La práctica docente a partir del modelo Deca y la teoría de las situaciones didácticas.*** V Festival internacional de Matemática. Puntarenas, Costa Rica.

Lemonidis, C. (1990). C***onception, réalisation et résultalts d'une expérience d'enseigment de l' homothétie. Thése Doctorat.*** Strasbourg, Francia. Université Louis Pasteur.

Mandelbrot, B. ***"Objetos Fractales. Autosemejanza".*** Consultado el 2 de marzo de 2011. coco.ccu.uniovi.es.

MEN. (2006). ***Estándares básicos de Competencias Matemáticas.*** Bogotá, Colombia. Magisterio.

Autores

Rosa María Palacios Jiménez

Formadora del Programa para la excelencia académica y docente. Todos a Aprender del Ministerio de Educación Nacional, docente de matemáticas del Establecimiento Educativo Policarpa Salavarrieta de la Secretaría de Educación de Bogotá. Magister en docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Contactos con el autor:
rosamariwill@hotmail.com

Claudia Cecilia Castro Cortés

Contactos con el autor:
mathclaudiacastro@yahoo.com

Luz Mery Díaz Camacho

Contactos con el autor:
dicamelu73@yahoo.es

*Perfiles solicitados a los usuarios pendiente de publicación

Bogotá - Colombia

www.compartirpalabramaestra.org

Compartir

Universidad de los Andes
Centro de Investigación y Formación en Educación - Cife

Encuentro Colombiano de matemática educativa

ALIANZA